Determinantes. Propiedades. Cálculo del rango de una matriz

Título: Determinantes. Propiedades. Cálculo del rango de una matriz.. **Target**: Profesores de Matemáticas.. **Asignatura**: Matemáticas. **Autor**: Emiliana Oliván Calzada, Licenciada en Matemáticas, Profesora de Matemáticas en Educación Secundaria.

1. PERMUTACIONES

Definición: Sea $E = \{1, 2, \cdots, n\}$. Llamaremos permutación de E a toda aplicación biyectiva de E en E.

Una permutación α quedará pues fijada por la n-tupla $(\alpha(1), \alpha(2), \cdots, \alpha(n))$ de las imágenes de E, a la que por abuso de lenguaje, a veces también se llama permutación. Designamos por $S(n)$ al conjunto de todas las permutaciones de E. Este conjunto consta de $n!$ elementos.

Definición: Se dice que en la permutación $(\alpha(1), \alpha(2), \cdots, \alpha(n))$ los elementos $\alpha(i)$ y $\alpha(j)$ están en inversión si $\alpha(i) > \alpha(j)$ siendo $i < j$.

Definición: Una permutación α se dice de clase par si tiene un número par de inversiones. En caso contrario se dirá de clase impar.

Definición: Se llama signatura de α al nº $sig\,(\alpha) = (-1)^{I(\alpha)}$ donde $I(\alpha) = n^{o}\, de \quad inversiones \quad de \quad \alpha$

Nota: $sig\,(\alpha) = \begin{cases} +1, & si \quad \alpha \quad es \quad par \\ -1, & si \quad \alpha \quad es \quad impar \end{cases}$

2. DETERMINANTES

Sea $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ con K cuerpo. Consideraremos de aquí en adelante $K = R$.

Definición: Llamamos determinante de A y lo denotamos $\det(A)$ o $|A|$ al escalar:

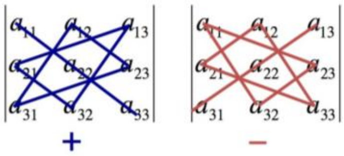
$|A| = \sum_{\alpha \in S(n)} sig(\alpha) a_{1\alpha(1)} a_{2\alpha(2)} \cdots a_{n\alpha(n)}$. Como α recorre $S(n)$ tendremos $n!$ sumandos.

Nota: Es evidente que $|A| = \sum_{\alpha \in S(n)} sig(\alpha) a_{\alpha(1)1} a_{\alpha(2)2} \cdots a_{\alpha(n)n}$

<u>Ejemplos</u>: Si $n = 2$: $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^0 a_{11}a_{22} + (-1)^1 a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Y si $n = 3$:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

En la práctica para resolver el determinante de orden tres, se utiliza la llamada Regla de Sarrus. Los tres sumandos positivos corresponden a las diagonales descendentes y los tres sumandos negativos corresponden a las diagonales ascendentes.



Si $n \geq 4$ calcularemos los determinantes usando las propiedades que veremos a continuación debido a la complejidad de su cálculo con la definición.

3. <u>PROPIEDADES</u>

i) $|A| = |A^t|$ con A^t matriz traspuesta de A. <u>Demostración</u>: Sea $A = (a_{ij})$. Así $A^t = (a_{ji})$.

$$|A^t| = \sum_{\alpha \in S(n)} sig(\alpha) a_{\alpha(1)1} a_{\alpha(2)2} \cdots a_{\alpha(n)n} = \sum_{\alpha \in S(n)} sig(\alpha) a_{1\alpha(1)} a_{2\alpha(2)} \cdots a_{n\alpha(n)} = |A|.$$

<u>Nota</u>: Esta propiedad permitirá sustituir la palabra fila por columna en las siguientes propiedades.

ii) Si todos los elementos de una fila de A son nulos entonces $|A| = 0$.

<u>Demostración</u>: Por definición de determinante, en cada uno de los $n!$ sumandos interviene como factor un elemento de esa fila, así hay un cero como factor en cada uno de los sumandos en el cálculo del determinante, luego $|A| = 0$.

iii) Si intercambiamos entre sí dos filas de A, el determinante cambia de signo.

<u>Demostración</u>: Sea $A = (a_{ij})$. Intercambiamos la fila p por la fila q y obtenemos una nueva matriz $B = (b_{ij})$ con $b_{ij} = a_{ij} \quad si \quad i \notin \{p,q\} \quad \forall j \in \{1, \cdots n\}; \quad b_{pj} = a_{qj} \quad \forall j$

Supongamos sin pérdida de generalidad que $p < q$. Así:

$$|B| = \sum_{\alpha \in S(n)} sig(\alpha(1), \alpha(2), \cdots, \alpha(p), \cdots, \alpha(q), \cdots \alpha(n))\, b_{1\alpha(1)} b_{2\alpha(2)} \cdots \underline{b_{p\alpha(p)}} \cdots \underline{b_{q\alpha(q)}} \cdots b_{n\alpha(n)} =$$

(Cambio de fila p por fija q, entonces tenemos que $b_{p\alpha(p)} = a_{q\alpha(p)}$ y que $b_{q\alpha(q)} = a_{p\alpha(q)}$)

$$= \sum_{\alpha \in S(n)} sig(\alpha(1), \cdots, \alpha(p), \cdots, \alpha(q), \cdots \alpha(n))\, a_{1\alpha(1)} a_{2\alpha(2)} \cdots a_{q\alpha(p)} \cdots a_{p\alpha(q)} \cdots a_{n\alpha(n)} \underset{Conmutatividad\ en\ R\ y\ p<q}{=}$$

$$= \sum_{\alpha \in S(n)} sig(\alpha(1), \cdots, \alpha(p), \cdots, \alpha(q), \cdots, \alpha(n)) a_{1\alpha(1)} a_{2\alpha(2)} \cdots a_{p\alpha(q)} \cdots a_{q\alpha(p)} \cdots a_{n\alpha(n)} =$$

(Cambiamos en la permutación α el orden de $\alpha(p)$ y de $\alpha(q)$, así cambiamos la paridad de la inversión)

$$= \sum_{\alpha \in S(n)} (-1) \cdot sig(\alpha(1), \alpha(2), \cdots, \alpha(q), \cdots, \alpha(p), \cdots, \alpha(n)) \cdot a_{1\alpha(1)} a_{2\alpha(2)} \cdots a_{p\alpha(q)} \cdots a_{q\alpha(p)} \cdots a_{n\alpha(n)} =$$

$$= -\sum_{\alpha \in S(n)} sig(\alpha(1), \alpha(2), \cdots, \alpha(q), \cdots, \alpha(p), \cdots \alpha(n)) \cdot a_{1\alpha(1)} a_{2\alpha(2)} \cdots a_{p\alpha(q)} \cdots a_{q\alpha(p)} \cdots a_{n\alpha(n)} = -|A|$$

Así $|B| = -|A|$

iv) El determinante de una matriz con dos filas iguales es nulo.

Demostración: Al intercambiar en A esas dos filas resulta la misma matriz. Así por la propiedad iii) $|A| = -|A| \Rightarrow |A| = 0$.

v) Al multiplicar una fila cualquiera de A por $\lambda \in R$ obtenemos una matriz B tal que $|B| = \lambda \cdot |A|$.

Demostración: Todos los $n!$ sumandos de $|B|$ contienen a uno y solo uno de los elementos de la fila multiplicada por λ, luego sacando factor común de λ resulta que $|B| = \lambda \cdot |A|$.

vi) $|\lambda A| = \lambda^n |A|$. Demostración: Consecuencia inmediata de v), aplicada a cada una de las filas.

vii) Si A tiene dos filas proporcionales $|A| = 0$.

Demostración: Sea λ el factor proporcional de la fila. Dividiendo esa fila por el factor λ obtenemos una matriz $|B|$ con dos filas iguales. Así $|A| = \lambda \cdot |B| \underset{\substack{\downarrow \\ por\ v}}{=} \lambda \cdot 0 = 0$.

viii) Si tenemos A expresada en sus filas de la siguiente forma:

$$A = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_i + F_i' \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix}. \text{ Entonces: } |A| = \begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_i + F_i' \\ \vdots \\ F_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_i \\ \vdots \\ F_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_i' \\ \vdots \\ F_n \end{vmatrix}$$

Demostración: Es una simple consecuencia de la aplicación de la propiedad distributiva del producto respecto de la suma al aplicar a cada sumando el desarrollo de $|A|$.

Nota: Podemos generalizar esta propiedad al caso de m sumandos en la fila i.

Ejemplo: Para $m = 2$: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2+2 & 3+2 & 4+2 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$.

ix) Si una fila de A se sustituye por otra igual a la suma de ella más otra multiplicada por $\lambda \in R^*$, el determinante de la matriz B obtenida no varia.

Demostración: Sea $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$, tal que, para todo $i \neq p$ es $a_{ij} = b_{ij}$.

Los elementos de la fila p de B son $b_{pj} = a_{pj} + \lambda a_{qj}$. Por la propiedad viii) $|B| = |A| + |C|$ donde la matriz C tiene proporcionales las filas p y q, luego por la propiedad vii) $|C| = 0$, así: $|A| = |B|$.

$$|B| \underset{\substack{\downarrow \\ prop\ \ viii}}{=} \underset{\substack{\downarrow \\ |A|}}{\begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{q1} \cdots a_{qn} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{p1} \cdots a_{pn} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} \cdots a_{nm} \end{vmatrix}} + \underset{\substack{\downarrow \\ 0 \\ prop\ \ vii}}{\begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{q1} \cdots a_{qn} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda a_{q1} \cdots \lambda a_{qn} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} \cdots a_{nm} \end{vmatrix}} = |A| \cdot$$

Nota: Podemos generalizar: Si una fila se sustituye por la resultante de sumarle una combinación lineal de las demás, el valor del determinante no varía.

x) Si una fila de A es combinación lineal de otras, entonces $|A| = 0$.

Demostración:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} \cdots\cdots\cdots\cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{p1} \cdots\cdots\cdots\cdots a_{pn} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{q1} \cdots\cdots\cdots\cdots a_{qn} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda a_{p1} + \beta a_{q1} \cdots\cdots \lambda a_{pn} + \beta a_{qn} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} \cdots\cdots\cdots\cdots a_{nn} \end{vmatrix} \underset{\substack{\downarrow \\ propiedad \quad viii}}{=} \underset{\substack{\downarrow \\ 0 \\ propiedad \quad vii}}{\begin{vmatrix} a_{11} \cdots\cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{p1} \cdots\cdots a_{pn} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{q1} \cdots\cdots a_{qn} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \lambda a_{p1} \cdots \lambda a_{pn} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} \cdots\cdots a_{nn} \end{vmatrix}} + \underset{\substack{\downarrow \\ 0 \\ propiedad \quad vii}}{\begin{vmatrix} a_{11} \cdots\cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{p1} \cdots\cdots a_{pn} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{q1} \cdots\cdots a_{qn} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \beta a_{q1} \cdots \beta a_{qn} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} \cdots\cdots a_{nn} \end{vmatrix}} = 0$$

Nota: De igual forma si tomamos una combinación lineal de las $(n-1)$ filas restantes.

4. MENORES COMPLEMENTARIOS Y ADJUNTOS. CÁLCULO DE DETERMINANTES.

Definiciones: Sea $A = (a_{ij}) \in M_n(R)$.

Al suprimir la fila p y la columna q de A (orden n) resulta una matriz de orden $(n-1)$ cuyo determinante recibe el nombre de menor complementario del elemento a_{pq} de A. Lo representaremos $|M_{pq}|$.

$$|M_{pq}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1q} & \cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ a_{p1} & a_{p2} \cdots & a_{pq} & \cdots a_{pn} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots & a_{nq} & \cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

Llamamos adjunto del elemento a_{pq} y lo denotamos $|A_{pq}|$ al número $|A_{pq}| = (-1)^{p+q} \cdot |M_{pq}|$.

Proposición: Sea $A \in M_n(R)$. $|A| = a_{p1}|A_{p1}| + a_{p2}|A_{p2}| + \cdots + a_{pn}|A_{pn}| \quad \forall p \in \{1, \cdots, n\}$

Nota: Aplicando esta proposición y las propiedades (para hacer ceros todos los elementos de una fila o columna salvo uno de ellos) podemos calcular de forma sencilla cualquier determinante.

Ejemplo: Calcular el valor del siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \underset{F_3'=F_3-F_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_2'=F_2-2F_1 \\ F_4'=F_4-3F_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & -3 & -7 \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{Proposición} \\ 1\cdot A_{11}+0\cdot A_{21}+0\cdot A_{31}+0\cdot A_{41}}}{=}$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 0 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \\ -5 & -3 & -7 \end{vmatrix} \underset{F_3''=F_3'-3F_2'}{=} \begin{vmatrix} -3 & 0 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \\ -8 & 0 & -10 \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{Proposición} \\ 0\cdot A_{12}+(-1)\cdot A_{22}+0\cdot A_{32}}}{=} (-1) \cdot \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ -8 & -10 \end{vmatrix} \underset{propiedad\ \ vi}{=}$$

$$= (-1)\cdot(-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 10 \end{vmatrix} \underset{propiedad\ \ v}{=} (-1)\cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = (-2)\cdot[15-16] = 2$$

Proposición: Sea $A = (a_{ij}) \in M_n(R)$. Sea $p \in \{1.\cdots, n\}$. Entonces:

$a_{p1}|A_{q1}| + a_{p2}|A_{q2}| + \cdots + a_{pn}|A_{qn}| = 0 \quad \forall q \neq p$ con $|A_{qj}|$ adjunto del elemento a_{qj}.

Demostración:

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12} \cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{p1}\ a_{p2} \cdots a_{pn} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{q1}\ a_{q2} \cdots a_{qn} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\ a_{n2} \cdots a_{nn} \end{pmatrix}$.Sustituimos la fila q por la fila p obteniendo la matriz B:

$$B=\begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\cdots a_{1n}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{p1}\ a_{p2}\cdots a_{pn}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{p1}\ a_{p2}\cdots a_{pn}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{n1}\ a_{n2}\cdots a_{nn}\end{pmatrix}$$

. Notar que $|B|=0$ .Calculamos ahora $|B|$ desarrollándolo por la fila q-ésima.

$$|B|=\begin{vmatrix} a_{11}\ a_{12}\cdots a_{1n}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{p1}\ a_{p2}\cdots a_{pn}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{p1}\ a_{p2}\cdots a_{pn}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{n1}\ a_{n2}\cdots a_{nn}\end{vmatrix}=a_{p1}\underbrace{\begin{vmatrix} a_{11}\ a_{12}\cdots a_{1n}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{p1}\ a_{p2}\cdots a_{pn}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{p1}\ a_{p2}\cdots a_{pn}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{n1}\ a_{n2}\cdots a_{nn}\end{vmatrix}}_{A_{q1}}+\cdots+a_{pn}\underbrace{\begin{vmatrix} a_{11}\ a_{12}\cdots a_{1n-1}\ a_{1n}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{p1}\ a_{p2}\cdots a_{pn-1}\ a_{pn}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{p1}\ a_{p2}\cdots a_{pn-1}\ a_{pn}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{n1}\ a_{n2}\cdots a_{nn-1}\ a_{nn}\end{vmatrix}}_{A_{qn}}$$

$$\Rightarrow |B|=a_{p1}|A_{q1}|+a_{p2}|A_{q2}|+\cdots+a_{pn}|A_{qn}|=0.$$

Ejemplo: El determinante de Vandermonde

Se define matriz de Vandermonde asociada a $a_1,a_2,\cdots,a_n\in K$ como la matriz cuadrada de orden n que contiene en sus columnas las sucesivas potencias de dichos escalares, es decir,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1\cdots\cdots 1\\ a_1 & a_2\cdots\cdots a_n\\ a_1^2 & a_2^2\cdots\cdots a_n^2\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1}\cdots a_n^{n-1}\end{pmatrix}$$

, cuyo determinante para $n\geq 2$ viene dado por la expresión: $\prod_{1\leq j<i\leq n}(a_j-a_i)$

5. MATRIZ INVERSA

Proposición: Sean $A,B\in M_n(R)$. Entonces $|A\cdot B|=|A|\cdot|B|$

Definición: Sea $A \in M_n(R)$. Diremos que la matriz $B \in M_n(R)$ es inversa de A si y solo si $AB = BA = I_n$ donde I_n es la matriz unidad de orden n. Denotaremos $B = A^{-1}$.

Proposición: $A \in M_n(R)$ tiene inversa $\Leftrightarrow |A| \neq 0$

Demostración:

$\Rightarrow)$ Sea A^{-1} la inversa de A. Entonces: $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n \rightarrow |AA^{-1}| = |I_n| \underset{\text{Proposición}}{\rightarrow} |A| \cdot |A^{-1}| = |I_n| = 1 \rightarrow |A| \neq 0$

$\Leftarrow)$ Supongamos que $|A| \neq 0$

Sea $B = (b_{ij})$ tal que $b_{ij} = \frac{|A_{ji}|}{|A|}$ siendo $|A_{ji}|$ el adjunto de a_{ji} en A.

Sea $C = A \cdot B = (C_{ij})$. Tenemos que:

$$C_{pq} = a_{p1}b_{1q} + a_{p2}b_{2q} + \cdots + a_{pn}b_{nq} \underset{b_{iq} = \frac{|A_{qi}|}{|A|}}{=} \frac{1}{|A|} \cdot \left(a_{p1}|A_{q1}| + a_{p2}|A_{q2}| + \cdots + a_{pn}|A_{qn}|\right)$$

Sabemos que $|A| = a_{p1}|A_{p1}| + a_{p2}|A_{p2}| + \cdots + a_{pn}|A_{pn}|$. Así, si $p = q$ $C_{pq} = \frac{1}{|A|} \cdot |A| = 1$

Sabemos también que

$\left(a_{p1}|A_{q1}| + a_{p2}|A_{q2}| + \cdots + a_{pn}|A_{qn}|\right) = 0 \quad \forall q \neq p$. Así, si $p \neq q$ $c_{pq} = \frac{1}{|A|} \cdot 0 = 0$

Entonces $C = I_n$ y $A \cdot B = I_n$

De forma análoga se ve que $B \cdot A = I_n$.

Entonces $B = A^{-1}$

Proposición: La inversa de una matriz si existe es única.

Demostración: Sea A^{-1} la inversa de la matriz A, es decir, $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.

Sea B otra matriz inversa de A, es decir $AB = BA = I_n$.

Si $AB = I_n \underset{\cdot A^{-1}\, a\, izda}{\longrightarrow} A^{-1}AB = A^{-1}I_n \rightarrow B = A^{-1}$.

Si $BA = I_n \underset{\cdot A^{-1}\, a\, derecha}{\longrightarrow} BAA^{-1} = I_n A^{-1} \rightarrow B = A^{-1}$

Nota: Así, si A es inversible, A^{-1} la obtenemos como: $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} |A_{11}| \cdots\cdots |A_{n1}| \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ |A_{1n}| \cdots\cdots |A_{nn}| \end{pmatrix}}_{\text{Matriz de los adjuntos traspuesta}}$

6. APLICACIÓN AL CÁLCULO DEL RANGO DE UNA MATRIZ

Definición: Sea $A \in M_{mxn}(R)$. Se llama menor de orden h en A al determinante de la matriz cuadrada de orden h obtenida suprimiendo $(m-h)$ filas y $(n-h)$ columnas en A.

Definición: Sea $|B|$ un menor de orden h de una matriz $A \in M_{mxn}(R)$. Si a $|B|$ le añadimos una fila p y una columna q de A, obtenemos un nuevo menor de orden $(h+1)$ llamado orlado de B.

Ejemplo: Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ \underline{3} & 1 & \underline{-4} & 2 \\ -1 & 2 & -5 & 1 \\ \underline{2} & 1 & \underline{1} & 3 \end{pmatrix} \in M_{5x4}(R)$. Sea $|B| = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ un menor de orden $h = 2$. Orlamos $|B|$ añadiendo la fila 2 y la columna 4, obteniendo el siguiente menor $|C|$ de orden $h+1=3$: $|C| = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

Proposición: Sea $|M| \neq 0$ un menor de orden h de $A \in M_{mxn}(R)$. Si todos los menores de orden $(h+1)$ obtenidos al orlar M con la fila p y cada una de las columnas restantes son nulos, entonces la fila p de los menores orlados es combinación lineal de las filas restantes.

Demostración: Sin pérdida de generalidad, sea $|M| = \begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{1h} \\ a_{21} \cdots a_{2h} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{h1} \cdots a_{hh} \end{vmatrix} \neq 0$.

Sea $|M_j| \quad j = 1, \cdots, n$ tal que: $|M_j| = \begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{1h} & a_{1j} \\ a_{21} \cdots a_{2h} & a_{2j} \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ a_{h1} \cdots a_{hh} & a_{hj} \\ a_{p1} \cdots a_{ph} & a_{pj} \end{vmatrix} = 0 \quad \forall j \in \{1, \cdots, n\}$, porque:

- Si $j \in \{1, \cdots, h\}$ $|M_j| = 0$ porque tiene dos columnas iguales.
- Si $j \in \{h+1, \cdots, n\}$ $|M_j| = 0$ porque $|M_j|$ es de orden $(h+1)$ y por hipótesis es cero.

Desarrollando $|M_j|$ por la columna j $\forall j \in \{1, \cdots, n\}$ tenemos:

$$0 = |M_j| = a_{1j}|A_{1j}| + a_{2j}|A_{2j}| + \cdots + a_{hj}|A_{hj}| + a_{pj}|A_{pj}|$$

$$\underset{\substack{0 \neq |M| = |A_{pj}| \\ despejando\ a_{pj}}}{\rightarrow} \quad a_{pj} = -\frac{|A_{1j}|}{M} a_{1j} - \frac{|A_{2j}|}{M} a_{2j} - \cdots\cdots - \frac{|A_{hj}|}{M} a_{hj} \quad \forall j \in \{1, \cdots, n\}$$

Entonces la fila p de A es combinación lineal del resto de filas.

Definiciones: Sea $A \in M_{mxn}(R)$

Diremos que el rango o característica de A es $rang(A) = h$ si A tiene un menor no nulo de orden h y todos los menores de orden superior a h son nulos.

Si $rang(A) = h$ llamamos menor principal de A y lo denotamos $|M|$ a cualquier menor de orden h no nulo de A.

Proposición: Sea $A \in M_{mxn}(R)$ con $rang(A) = h$ y $|M|$ un menor principal de A. Entonces cualquier fila de A y no de M es combinación lineal de las filas que figuran en el menor.

Proposición: El rango de una matriz A no varía si se añade o suprime una fila (o columna) que es combinación lineal del resto de filas (o columnas).

Observación: Si consideramos las filas de A como vectores, se puede definir el rango de una matriz como el rango de los vectores fila, es decir, el número de vectores linealmente independientes. De esta forma es más fácil entender las propiedades anteriores.

Notar que el rango de A no varía si lo hallamos por filas o por columnas.

Método práctico el cálculo del rango usando determinantes.

1º) Obtenemos un menor no nulo de orden h de A.

2º) Orlamos $|M|$ con una fila de A que no está en $|M|$ y cada una de las columnas de A que no intervienen en M.

3º) Si todos los menores de orden $(h+1)$ así obtenidos son nulos, la fila añadida es combinación lineal de las de M y la suprimimos. Luego añadimos la siguiente fila procediendo de igual forma hasta encontrar un menor $|N|$N no nulo de orden $(h+1)$ si lo hubiera (si no existe dicho menor entonces $rang(A)=h$). Así $rang(A)\geq rang(N)=h+1$.

Continuamos análogamente hasta agotar las filas de A.

Ejemplo: Calcular el rango de $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & 3 & 6 \\ 5 & -2 & -1 & 4 & 9 \end{pmatrix}\in M_{4x5}$.

Solución: Sea $|M_1|=|a_{11}|=|2|\neq 0 \rightarrow rang(A)\geq 1$

Orlamos con F_2 y C_2. Entonces $|M_2|=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\neq 0 \rightarrow rang(A)\geq 2$.

$$\left\{ \begin{array}{l} Orlamos\ con\ F_3\ y\ C_3.\ Entonces \quad |M_3|=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix}=0 \\ Orlamos\ con\ F_3\ y\ C_4.\ Entonces \quad |M_4|=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix}=0 \\ Orlamos\ con\ F_3\ y\ C_5.\ Entonces \quad |M_5|=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 6 \end{vmatrix}=0 \end{array} \right\}$$

Orlando con F_3 todos los menores son nulos. Entonces suprimimos F_3.

Orlamos con F_4 y C_3. Entonces $|M_6| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 5 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0$.

Orlamos con F_4 y C_4. Entonces $|M_7| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 5 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0$.

Orlamos con F_4 y C_5. Entonces $|M_8| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 5 & -2 & 9 \end{vmatrix} = 0$. Suprimimos F_4.

Así $rang(A) = rang(M_2) = 2$.

Notar que tenemos que $|M_2|$ es un menor principal no nulo, luego F_3 y F_4 son combinación lineal de F_1 y F_2.

7. ASPECTOS DIDÁCTICOS

Este tema se estudia en Matemáticas en 2º Bachillerato según el Real Decreto. Se pide el concepto de determinante, su cálculo y propiedades aplicados a la resolución de sistemas en particular. Los determinantes se utilizan para resolver sistemas utilizando la regla de Cramer.

Es importante que los alumnos conozcan las propiedades de los determinantes y la regla de Sarrus a la hora de calcular determinantes. Se pedirá a los alumnos el cálculo de determinantes de orden mayor que tres, así como el cálculo del rango de matrices que será útil en la resolución de sistemas. Es en este tema cuando ha de trabajarse el cálculo de la matriz inversa utilizando los determinantes. ●

Bibliografía

Rey Pastor, J. Elementos y análisis algebraico.

Álgebra lineal. Juan de Burgos. Editorial McGraw-Hill.